理工 1

数学

氏名	

受験番号	

1 p, qを実数の定数とする。3次方程式 $x^3+px^2+qx+1=0$ が虚数解 α と $\frac{1}{\alpha}$ をもつとき，以下の問いに答えよ。

（1）$p=q$が成り立つことを示せ。

（2）定数pの値の範囲を求めよ。

（3）αの実部s，虚部tについて$s+2t=-1$が成り立つときのpの値を求めよ。

［解答欄］

(1) 題意より $\begin{cases}\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+1=0 & \cdots\cdots ① \\ \alpha^{-3}+p\alpha^{-2}+q\alpha^{-1}+1=0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

②$\times\alpha^3$より $1+p\alpha+q\alpha^2+\alpha^3=0$

①との差をとり $p(\alpha^2-\alpha)+q(\alpha-\alpha^2)=0$ —③

αは虚数であるので $\alpha^2-\alpha=\alpha(\alpha-1)\neq 0$. したがって ③より $p-q=0$

よって $p=q$.

(2) $p=q$のとき，3次方程式は

$x^3+p(x^2+x)+1=(x+1)(x^2-x+1)+px(x+1)$

$=(x+1)(x^2+(p-1)x+1)=0$

これより虚数解は $x^2+(p-1)x+1=0$ —④ の解であらねばならず，

虚数解をもつ $\Longleftrightarrow D=(p-1)^2-4=(p-3)(p+1)<0 \Longleftrightarrow -1<p<3$

④の解をα,βとするとき，解と係数の関係より $\alpha\beta=1$.

よって虚数解は α と $\frac{1}{\alpha}$ となる.

(3) ④の解は$\alpha=s+it$ とその共役な複素数 $\overline{\alpha}=s-it$ である、再び

④の解と係数の関係より

$\alpha\overline{\alpha}=(s+it)(s-it)=s^2+t^2=1$ —⑤

$s+2t=-1$ より $s=-(2t+1)$. ⑤に代入し

$(2t+1)^2+t^2=5t^2+4t+1=1$ よって $5t^2+4t=t(5t+4)=0$

αは虚数解より $t\neq 0$. ゆえに $t=\frac{-4}{5}$. このとき $s=-(2t+1)=\frac{3}{5}$.

④の解と係数の関係より $\alpha+\overline{\alpha}=2s=\frac{6}{5}=-(p-1)$

よって $p=\frac{-1}{5}$.

得点	

数　学

氏名		受験番号	

2 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は次の条件によって定められている。

すべての自然数 n に対して a_n, b_n はともに整数で，$(3+2\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n$

このとき以下の問いに答えよ。

(1) a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ。

(2) a_{n+1}, b_{n+1} それぞれを，a_n と b_n を用いて表せ。

(3) n を自然数とするとき，$(3-2\sqrt{2})^n = a_n - \sqrt{2}b_n$ を示せ。

(4) 極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ を求めよ。

[解答欄]

(1) $3+2\sqrt{2} = a_1+\sqrt{2}b_1$. a_1, b_1 は整数より $a_1=3$, $b_1=2$.

$(3+2\sqrt{2})^2 = 9+8+12\sqrt{2} = 17+12\sqrt{2} = a_2+\sqrt{2}b_2$. a_2, b_2 は整数より $a_2=17$, $b_2=12$。

(2) $a_{n+1}+\sqrt{2}b_{n+1} = (3+2\sqrt{2})^{n+1} = (3+2\sqrt{2})^n(3+2\sqrt{2})$

$= (a_n+\sqrt{2}b_n)(3+2\sqrt{2}) = 3a_n+4b_n+\sqrt{2}(2a_n+3b_n)$

ここで $a_{n+1}, b_{n+1}, a_n, b_n$ は整数なので，

$a_{n+1} = 3a_n+4b_n$, $b_{n+1} = 2a_n+3b_n$。

(3) $n=1$ のときは $a_1=3$, $b_1=2$ より成立. $n=k$ のとき成立，

すなわち $(3-2\sqrt{2})^k = a_k-\sqrt{2}b_k$ と仮定する. このとき

$(3-2\sqrt{2})^{k+1} = (3-2\sqrt{2})^k(3-2\sqrt{2}) = (a_k-\sqrt{2}b_k)(3-2\sqrt{2})$

$= 3a_k+4b_k-\sqrt{2}(2a_k+3b_k)$

(2)より $= a_{k+1}-\sqrt{2}b_{k+1}$ よって $n=k+1$ のときにも成立.

ゆえにすべての自然数についても成立.

(4) $(3+2\sqrt{2})^n = a_n+\sqrt{2}b_n$, $(3-2\sqrt{2})^n = a_n-\sqrt{2}b_n$ $\Longrightarrow$ $a_n = \frac{1}{2}\{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n\}$, $b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n\}$

ゆえに $\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n} = \sqrt{2}\frac{1+\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\right)^n}{1-\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\right)^n}$

$0<\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}<1$ より $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\right)^n = 0$ よって $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$.

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

3　四面体OABCは次の2条件を満たすとする。

1．$OA = OB = OC = 1$

2．$\angle AOB = \angle AOC = 90°$，　$\angle BOC = 60°$

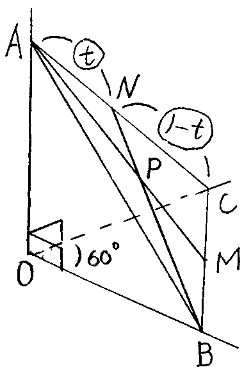
辺BCの中点をM，辺ACを$t : (1-t)$に内分する点をNとおき，線分AMと線分BNとの交点をPとおく。ただし，tは$0 < t < 1$を満たす実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AP}$を$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$およびtを用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$とするとき，$\overrightarrow{BN}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$および$t$を用いて表せ。

(3) $OP \perp BN$のとき，tの値を求めよ。

[解答欄]



(1) $\triangle ABC$ は $AB = AC = \sqrt{2}$ の二等辺三角形，
AMは$\angle BAC$の二等分線となるから

$BP : PN = AB : AN = 1 : t$

よって $\overrightarrow{AP} = \dfrac{\overrightarrow{AN} + t\overrightarrow{AB}}{1+t} = \dfrac{t\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AB}}{1+t}$.

(2) $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$= t(\vec{c} - \vec{a}) - (\vec{b} - \vec{a}) = (1-t)\vec{a} - \vec{b} + t\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \dfrac{t(\vec{c}-\vec{a}) + t(\vec{b}-\vec{a})}{1+t}$　((1)より)

$= \dfrac{1-t}{1+t}\vec{a} + \dfrac{t}{1+t}(\vec{b} + \vec{c})$

$OP \perp BN$ より 内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$ となるように t を定めればよい.

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BN} = \left\{\dfrac{1-t}{1+t}\vec{a} + \dfrac{t}{1+t}(\vec{b} + \vec{c})\right\} \cdot \left\{(1-t)\vec{a} - \vec{b} + t\vec{c}\right\}$

ここで四面体OABCの条件より $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$，
$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos 60° = \dfrac{1}{2}$．これらを上式の展開でもちいると

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BN} = \dfrac{(1-t)^2}{1+t}|\vec{a}|^2 - \dfrac{t}{1+t}|\vec{b}|^2 + \dfrac{t^2}{1+t}|\vec{c}|^2 + \left(\dfrac{t^2}{1+t} - \dfrac{t}{1+t}\right)\vec{b}\cdot\vec{c}$

$= \dfrac{1}{1+t}\left\{(1-t)^2 - t + t^2 + \dfrac{1}{2}(t^2 - t)\right\}$

$= \dfrac{1}{1+t}\left(\dfrac{5}{2}t^2 - \dfrac{7}{2}t + 1\right) = \dfrac{1}{2(1+t)}(5t^2 - 7t + 2)$

$= \dfrac{1}{1+t}(5t-2)(t-1)$

tは$0 < t < 1$を満たすので，$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$ となるのは $t = \dfrac{2}{5}$．

得点	

数　　学

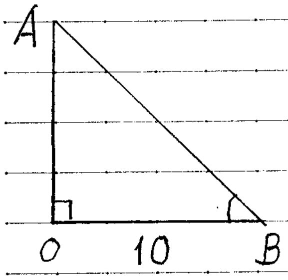
氏名	

受験番号	

4　OB=10, ∠AOB = 90° を満たす三角形 OAB を考える。このとき $\dfrac{\sin\angle ABO}{AB^2}$ を最大にする OA の長さを求めよ。またそのときの $\dfrac{\sin\angle ABO}{AB^2}$ の値を求めよ。

[解答欄]

$OA = a$ とおく.



$AB^2 = 100 + a^2$, $\sin\angle ABO = \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{a}{\sqrt{100+a^2}}$

ゆえに $\dfrac{\sin\angle ABO}{AB^2} = \dfrac{a}{(100+a^2)^{\frac{3}{2}}} = f(a)$ とおく.

このとき

$$f'(a) = \left(a(100+a^2)^{-\frac{3}{2}}\right)' = (100+a^2)^{-\frac{3}{2}} + a\cdot\frac{-3}{2}(100+a^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2a$$

$$= (100+a^2)^{-\frac{5}{2}}(100+a^2-3a^2)$$

$$= \frac{-2}{(100+a^2)^{\frac{5}{2}}}(a^2-50) = \frac{-2}{(100+a^2)^{\frac{5}{2}}}(a-5\sqrt{2})(a+5\sqrt{2})$$

a	0		$5\sqrt{2}$	
$f'(a)$		+	0	−
$f(a)$	0	↗		↘

よって $f(a)$ は, $a = OA = 5\sqrt{2}$ のとき

最大値 $f(5\sqrt{2}) = \dfrac{5\sqrt{2}}{(150)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{5^2\cdot 6\sqrt{6}}$

$= \dfrac{1}{150\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{450}$ をとる.

得点	

数　学

氏名	

受験番号	

5　aを正の定数，eを自然対数の底とし，$f(x)=\{x^2-(a+1)x+2a-1\}e^{-x}$とおく。以下の問いに答えよ。

（1）関数$f(x)$が$x \geqq 0$において最小値をもつように，定数aの値の範囲を定めよ。ただし，$x>0$のとき不等式 $e^x > \dfrac{x^3}{6}$ が成り立つことを用いてよいとする。

（2）$a=\dfrac{1}{2}$のとき，定積分 $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$ を求めよ。

[解答欄]

(1)　まず $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ を示す．$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ は明らか．不等式 $e^x > \dfrac{x^3}{6}\ (x>0)$ を用い，

$0<xe^{-x}=\dfrac{x}{e^x}<\dfrac{x}{\frac{x^3}{6}}=\dfrac{6}{x^2}\to 0\ (x\to+\infty)$，$0<x^2e^{-x}=\dfrac{x^2}{e^x}<\dfrac{x^2}{\frac{x^3}{6}}<\dfrac{6}{x}\to 0\ (x\to+\infty)$

より $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=0$　ゆえに $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

$f'(x)=\{2x-(a+1)\}e^{-x}-\{x^2-(a+1)x+2a-1\}e^{-x}=\{-x^2+(a+3)x-3a\}e^{-x}$
$=-(x-3)(x-a)e^{-x}$　そこでaの値により$f(x)$の増減を場合分けする.

① $0<a<3$ のとき

x	0		a		3	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘		↗		↘

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ を考慮すると，$f(a)=(a-1)e^{-a}$ が $x\geqq 0$ での最小値となるためには，
$f(a)\leqq 0$　すなわち $a\leqq 1$

② $3<a$ のとき

x	0		3		a	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘		↗		↘

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ より，$f(3)=(5-a)e^{-3}$ が $x\geqq 0$ での最小値となるためには，$f(3)\leqq 0$．すなわち $5\leqq a$

③ $a=3$ のとき

x	0		3	
$f'(x)$		$-$	0	$-$
$f(x)$		↘		↘

$f(x)$の最小値はなし，

①②③より $f(x)$ が $x\geqq 0$ において最小値をもつのは $0<a\leqq 1$ または $5\leqq a$

(2)　$a=\dfrac{1}{2}$ のとき $f(0)=0$，$f(1)=-\dfrac{1}{2}e^{-1}<0$．よって①の増減表から，$0\leqq x\leqq 1$ では $f(x)\leqq 0$

したがって $\displaystyle\int_0^1|f(x)|\,dx=-\int_0^1 f(x)\,dx=-\int_0^1\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)e^{-x}dx=\left[\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)e^{-x}\right]_0^1$

$\displaystyle-\int_0^1\left(2x-\frac{3}{2}\right)e^{-x}dx=-\frac{1}{2}e^{-1}+\left[\left(2x-\frac{3}{2}\right)e^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 2e^{-x}dx=-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{3}{2}+\left[2e^{-x}\right]_0^1$

$=2e^{-1}-\dfrac{1}{2}$.

得点	